Exercice 1

$f(x) = x \ln x \qquad x>0$

$g(x) = x^2 \ln x \qquad x>0$

1) pour $x>0$ on a :

$$g'(x) = 2x \ln x + x^2 . \frac{1}{x}$$

$$= 2x \ln x + x$$

2) pour $x>0$

$$g'(x) = 2x \ln x + x$$

$$= 2 f(x) + x$$

$$\Rightarrow g'(x) - x = 2 f(x)$$

3) f est continu sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow$ f admet une primitive F sur $]0,+\infty[$

On a :

$$f(x) = \frac{1}{2} g'(x) - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{x^2}{4} + cte$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + cte}$$

Exercice 2

1) $f(x) = \ln(2x+1)$

$2x+1>0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$x>0$ et $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Donc f est dérivable sur $]0,1[\cup]1, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

3) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$, $x>-1$

f est dérivable si et seulement si on a : $\ln(x+1) > 0$

$\ln(x+1) > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow x > 0$

Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{(\ln(x+1))'}{2\sqrt{\ln(x+1)}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}}{2\sqrt{\ln(x+1)}} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

5) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

f est dérivable si et seulement si on a :

$x^2 - 3x > 0$ or $x^2 - 3x = x(x-3)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de x^2-3x	$+$		0	$-$	0		$+$

Donc f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2-3x)'}{(x^2-3x)} = \frac{2x-3}{(x^2-3x)}$$

6) $f(x)=\ln\left(\left|x^2+x-2\right|\right)$

f est dérivable si et seulement si $x^2+x-2\neq 0$

On a :

$x^2+x-2=0 \overset{a+b+c=0}{\Rightarrow} x=1$ ou $x=-2$

Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}\setminus\{-2,1\}$ et :

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

7) $f(x)=\ln|\cos x|$

f est dérivable si et seulement si

$\cos x\neq 0 \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$

f est dérivable sur $\square\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

et : $f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-tgx$ donc

$f'(x)=-tgx$, $x\in\square\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

8) $f(x)=\ln^2(2x+1)$

f est dérivable pour $2x+1>0$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

et $f'(x)=2.\frac{2}{2x+1}.\ln(2x+1)$

Donc $\forall x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$f'(x)=\frac{4}{2x+1}.\ln(2x+1)$

9) $f(x)=\ln(\ln x)$. f est dérivable si et seulement si on a :

$\ln x>0\Rightarrow x>1$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

Donc : $f'(x)=\frac{1}{x\ln x}, x>1$

10) $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

Signe de $\frac{1+x}{1-x}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	∥	$-$	

$\frac{1+x}{1-x}>0$ Donne $x\in\ ]-1,1[$

f est dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x)=\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}}$

Or $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{-1-1}{(1-x)^2}=\frac{-2}{(1-x)^2}$

Donc $f'(x)=\frac{\frac{-2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{-2}{(1+x)(1-x)}=\frac{-2}{1-x^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$

11) $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x+\ln x)}{x^2}=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

12) $f(x)=x\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

f est dérivable si et seulement si on a :

$x-1\neq 0$ et $x\neq 0$

f est dérivable si et seulement si $x\in\square^*\setminus\{1\}$

et on a : $f'(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+x.\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}}$

$$f'(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+x.\frac{\frac{1}{x}.x}{\frac{x-1}{x}}$$

Donc : $f'(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x-1}$

Exercice 3

Dans tout l'exercice : k est une constant réelle

a) $x\in\left]\frac{3}{4},+\infty\right[\Rightarrow 4x-3>0$ d'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$$f(x)=\frac{1}{4}.\frac{(4x-3)'}{(4x-3)}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}\ln(4x-3)+k$$

b) $x>0$, d'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\ln x+k$$

c) $x>0$, d'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$$f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}=\frac{1}{x}(\ln x)^2=(\ln x)'.(\ln x)^2$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}\ln x^3+k$$

d) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x+1)}$

$x>e^{-1}=\frac{1}{e}\Rightarrow \ln x>\ln\frac{1}{e}=-1$

$\Rightarrow \ln x+1>0$ et $x>0$, d'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x+1}=\frac{(\ln x+1)'}{\ln x+1}$$

$$\Rightarrow F(x)=\ln(\ln x+1)+k$$

e) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}, x>1,$

donc x > 0 et lnx > 0

D'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$$f(x)=\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{-1}{\ln x}+cte$$

f) $f(x)=\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$ .fonction rationnelle

et $2x^2+2x+1\neq 0$ car $\Delta=-4<0$

D'où f est continue sur $I=\mathbb{R}$ par suite elle admet une primitive F

On a $f(x)=\frac{1}{2}.\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$

Donc $f(x)=\frac{1}{2}.\frac{(2x^2+2x+2)'}{2x^2+2x+2}$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+2)+k$$

g) $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}$, fonction rationnelle

et $x-1\neq 0$ car $x>1$

D'où f est continue sur $I=\mathbb{R}$ par suite elle admet une primitive F

$$f(x)=\frac{2x-2+6}{x-1}=2+\frac{6}{x-1}=2+6.\frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow F(x)=2x+6.\ln(x-1)+k$$

Exercice 4

1) $g(x)=\frac{x^2+4x+7}{x+2}, x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

a) $g(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}+\frac{3}{x+2}$

$$=\frac{(x+2)^2}{x+2}+\frac{3}{x+2}$$

$$=x+2+\frac{3}{x+2}$$

Donc $a=1, b=2, c=3$

g étant une fonction rationnelle, g est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}-\{-2\}$ en particulier sur $]-2,+\infty[$

Donc g admet une unique primitive G Vérifiant $G(-1)=0$ sur $]-2,+\infty[$.

On a :

$$G(x)=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x+2)+cte.$$

Or $G(-1)=0$ et $G(-1)=\frac{1}{2}-2+cte=-\frac{3}{2}+cte$

$$\Rightarrow cte=\frac{3}{2}$$

D'où $G(x)=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x+2)+\frac{3}{2}$

2) $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{\alpha}{(x+1)^2}+\frac{\beta}{x+1}$

$$=\frac{\alpha+\beta(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{\alpha+\beta+\beta x}{(x+1)^2}$$

Par identification : $\begin{cases}\beta=1\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$

$\Rightarrow \alpha=-\beta$ et $\beta=1$

D'où $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$

Pour $x>-1$ on a :

$$F(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)+cte$$

$F(0)=1+cte=0\Rightarrow cte=-1$

Donc $F(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)-1$

Exercice 5

a)

$\ln(2x-1)=0\Leftrightarrow 2x-1=1\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$

Donc $S=\{1\}$

b)

$\ln(2x+1)-1=0\Leftrightarrow \ln(2x+1)=1\Leftrightarrow 2x+1=e$

$\Leftrightarrow 2x=e-1\Leftrightarrow x=\frac{e-1}{2}$

Donc $S=\left\{\frac{e-1}{2}\right\}$

c)

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)+\ln 2=\ln\left(\frac{7}{4-x}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+2}{2-x}\right)=\ln\left(\frac{7}{4-x}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2x+2}{2-x}=\frac{7}{4-x}\Leftrightarrow (2x+2)(4-x)-7(2-x)=0$

$\Leftrightarrow -2x^2+13x-6=0$

$\Delta=169-48=121=11^2$

$\Rightarrow x'=\frac{13+11}{-4}=-6,\ x''=\frac{13-11}{-4}=-\frac{1}{2}\ ;x\in]-1,2[$

Or $-6\notin]-1,2[$ et $\frac{-1}{2}\in]-1,2[$

$$S=\left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

d) $\ln^2 x-3\ln x-4=0$ (E). Posons $X=\ln x$

(E) est équivalente à : $\begin{cases}X^2-3X-4=0\\ X=\ln x\end{cases}$

$X^2-3X-4=0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} X'=-1, X''=4$

$\ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ et $\ln x=4\Leftrightarrow x=e^4$

Donc $S=\left\{\frac{1}{e},e^4\right\}$.

e) $\ln|2x+1|=2\ln 2$

$\Rightarrow \ln|2x+1|=\ln 4;\ x\neq-\frac{1}{2}\Rightarrow |2x+1|=4$

$2x+1=4$ ou $2x+1=-4$

$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{-5}{2}$

Donc $S=\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$

f) Pour $x\neq-1$ et $x\neq-2$

$\frac{1}{2}\ln|x+1|=\ln|x+2|$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{|x+1|}=\ln|x+2|$

$\Leftrightarrow \sqrt{|x+1|}=|x+2|$

$\Leftrightarrow |x+1| = |x+2|^2 = (x+2)^2$

$\Leftrightarrow |x+1| = x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4 = x+1$ ou $x^2+4x+4 = -x-1$

$\Leftrightarrow x^2+3x+3=0$ ou $x^2+5x+5=0$

$\Delta = 9-12 < 0$ | $\Delta = 25-20 = 5$

$S_1 = \varnothing$

$\Leftrightarrow x' = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}, x'' = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\right\}$

g) $\ln|x+3| + \ln|x+5| = \ln 15$, $x \neq -5$ et $x \neq -3$

$\ln|(x+3)(x+5)| = \ln 15 \Leftrightarrow |(x+3)(x+5)| = 15$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x+5) = -15 \\ (x+3)(x+5) = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x+15 = 15 & (1) \\ x^2+8x+15 = -15 & (2) \end{cases}$

(1) donne $x(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -8$

(2) donne $x^2+8x+30 = 0$, on a $\Delta < 0$

D'où $S = \{0, -8\}$

Exercice 6

a) $\ln^2 x - \ln\dfrac{1}{x} - 2 = 0 \Rightarrow \ln^2 x + \ln x - 2 = 0$

$\Rightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0, x > 0$

$\Rightarrow \ln x = 1$ ou $\ln x = -2$

$\Rightarrow x = e$ ou $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

$S = \left\{\dfrac{1}{e^2}, e\right\}$

b) $1 + \ln x = \dfrac{6}{\ln x}$, $x > 0$ et $x \neq 1$

$\Rightarrow \ln x + \ln^2 x - 6 = 0$

Posons $t = \ln x$

$\Rightarrow \begin{cases} t^2+t-6=0 \\ t = \ln x \end{cases}$

$t^2+t-6=0, \Delta = 1+24 = 25$

$t' = \dfrac{-1+5}{2} = 2$, $t'' = \dfrac{-1-5}{2} = -3$

Donc

$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

$\ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$

$S = \left\{\dfrac{1}{e^3}, e^2\right\}$.

c) $\ln x - 2\ln(x-4) + \ln 2 = 0$, *existe* pour $x > 4$

$\underbrace{\ln x + \ln 2}_{\downarrow} - \underbrace{2\ln(x-4)}_{\downarrow} = 0$

$\Rightarrow \ln 2x - \ln\left((x-4)^2\right) = 0 \Rightarrow 2x = (x-4)^2$

$\Rightarrow 2x = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Delta' = 25-16 = 9 > 0$

$x' = 5+3 = 8 > 4$ ou $x'' = 5-3 = 2 < 4$

Donc $S = \{8\}$

d) $\ln|x+1| < 1$, $x \neq -1$

$\Rightarrow |x+1| < e \Leftrightarrow -e < x+1 < e$

$\Rightarrow -e-1 < x < e-1$, $x \neq -1$

Donc $S =]-e-1, e-1[\setminus \{-1\}$

e) $\ln|x| < -\ln|3x+2|$ (E)

$x \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$(E) \Leftrightarrow \ln|x| + \ln|3x+2| < 0$

$\Leftrightarrow \ln|x(3x+2)| < 0$

$\Leftrightarrow |x(3x+2)| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x(3x+2) < 1$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x-1 < 0$ ou $3x^2+2x+1 > 0$

$a-b+c=0$ | $\Delta = 4-12 < 0$

$x' = -1, x'' = \dfrac{1}{3}$

$S_2 = \mathbb{R}^* \setminus \left\{\dfrac{-2}{3}\right\}$

$\mathbb{R}$ *T.signe*

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x^2+2x-1$	$+$		0	$-$	0		$+$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \times \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{1} = 0$$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ et $\ln(1) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+3}$ posons $X = x+2$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \underbrace{\frac{X}{X+1}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\ln X}{X}}_{0} = 0$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ posons $X = \ln x$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X+1}{X-1} = 1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$ posons $X = x+1$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln X}{X-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln X}{X}}_{0} \times \underbrace{\frac{X}{X-1}}_{1} = 0$

*/ Posons $X = \frac{x+1}{x}$

$X = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = X - 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{X-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x^3 - \ln^2 x + 3\ln x - 4$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2 x(2\ln x - 1) + 3\ln x - 4$

$= +\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{0}$

$= 1 \times \frac{1}{-\infty}$

$= 0$

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{4x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}$

*/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x)}{x^2+x} \times \left(\frac{x^2+x}{x}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x)}{x^2+x}$ Posons $X = x^2+x$

$= \lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

Et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x} \lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1$

Donc

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x)}{x^2+x} \times \frac{x^2+x}{x} = 1 \times 1 = 1$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} = 1$

*/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ posons $X = x^2$

$= \lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2/3} \ln x = 0$ (formule)

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/2} \ln x = 0$ (formule)

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = 0$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x^{1/3}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3} \frac{\ln x}{x} = 0$

*/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$

$=f'(2)$ avec $f(x)=\ln x$

$\Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\dfrac{1}{2}$

ou bien : posons $X=x-2$

$\Rightarrow x=X+2$

$\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{X}{2}+1\right)}{X}$ Posons $t=\dfrac{X}{2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{2t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}\times\dfrac{1}{2}$

$=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

*/ $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}$

$=f'(e)$, avec $f(x)=\ln x$

$=\dfrac{1}{e}$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{x\ln x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{\ln x}{x}}=\dfrac{1}{0^+}+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+2|}{|x-1|}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Exercice 8

$f(x)=x-1-\ln x,\ x\in\ ]0,+\infty[$.

$g(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x},\ x\in\ ]0,+\infty[$.

1/ $\otimes\ f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$f'(x)=0\Rightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

$\otimes\ g(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

2) */ f est croissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout $x>1$: $f(x)\succ f(1)\Rightarrow f(x)\succ 0$

$\Rightarrow x-1-\ln x\succ 0\Rightarrow \ln x\prec x-1$. (1)

*/ g est croissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout

$x>1$: $g(x)\succ g(1)\Rightarrow g(x)\succ 0$

$\Rightarrow \ln x-\dfrac{x-1}{x}\geq 0\Rightarrow \ln x\geq\dfrac{x-1}{x}$. (2)

(1) et (2) donne : $\forall x>1\ \ \dfrac{x-1}{x}\prec\ln x\prec x-1$

Exercice 9

$x\mapsto\begin{cases}f(x)=2x-x\ln|x|;x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$

1) */ continuité de f en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2x-x\ln x=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x-x\ln(-x)$

(Posons $X=-x$)

$$= \lim_{X \to 0^+} -2X + X \ln X = 0 = f(0)$$

f Continue à droite et à gauche en 0 donc f continue en 0.

*/ Dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - x \ln|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 - \ln|x| \qquad (\text{posons } X = |x|)$$

$$= \lim_{X \to 0^+} 2 - \ln X = +\infty$$

D'où f est non dérivable en 0.

2) a) $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$ et

$$f(-x) = 2(-x) - (-x)\ln|-x|$$

$$= -2x + x \ln|x|$$

$$= -f(x)$$

$f(-0) = f(0) = -f(0) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = -f(x)$

Par suite f est impaire.

b) f est impaire : on étudie f sur $Df \cap \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

On a : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et $f'(x) = (2x - x \ln x)'$

$$= 2 - (\ln x + 1)$$

$$= 1 - \ln x$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow x = e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	|	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	e	↘	$-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x - x \ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x(2 - \ln x) = -\infty$$

$f(e) = 2e - e \ln e = 2e - e = e$

f est impaire $\Rightarrow 0$ est une centre de symétrie pour C

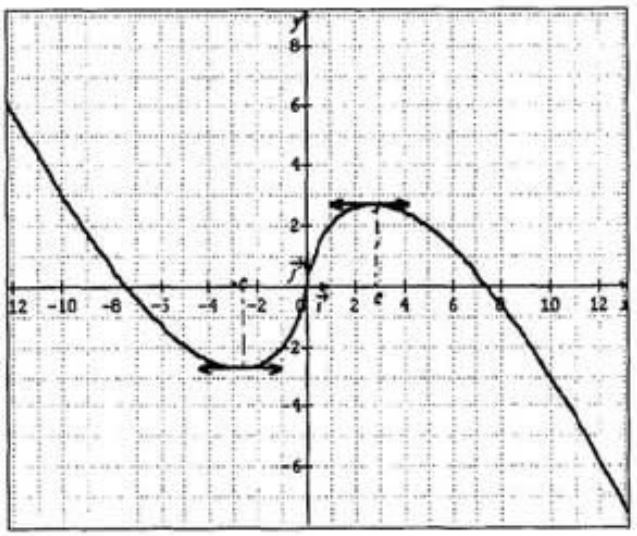
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2 - \ln x = -\infty$$

$\Rightarrow C_f$ admet une branche infinie parabolique de direction $(o, \vec{j})$.

C admet une tangente verticale en 0.

COURBE :



Exercice 10

1) •/ $Df = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0\}$.

$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

•/ $x \in Df$ et $-x \in Df$

$$f(-x) = \ln|(-x)^2 - 1| = \ln|x^2 - 1| = f(x)$$

D'où f est paire.

On étudie f sur $\mathbb{R}_+$ $\cap Df = [0,1[\cap]1, +\infty[$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. et

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Signe de $f'(x)$

x	0	1	$+\infty$
x^2-1	$-$	0	$+$
$2x$	$+$		$+$
$\dfrac{2x}{x^2-1}$	$-$	$\|\|$	$+$

Tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	0 ↘	$\|\|$ $-\infty$	↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \ln\left|1-x^2\right| \underset{t=1-x^2}{=} \lim\limits_{t\to0^+} \ln t = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

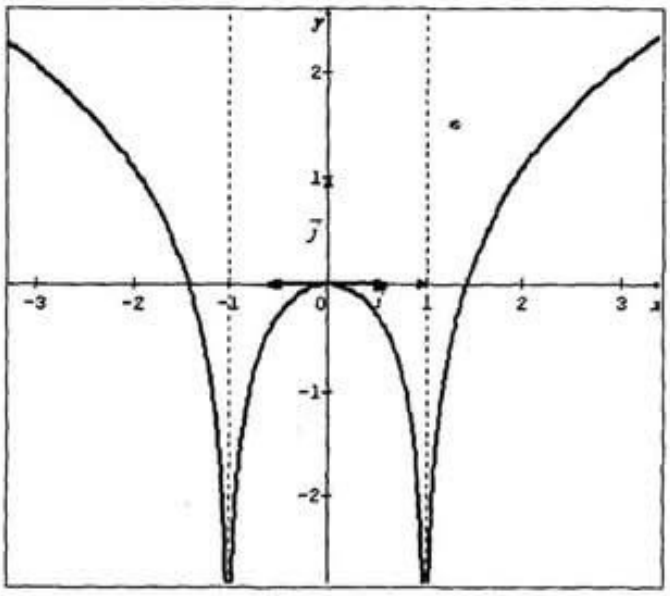
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ C admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{i})$.

Courbe : f est paire donc C est symétrique par rapport à $(o,\vec{j})$.



4) $g(x) = x\ln\left(x^2-1\right) + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - 2x$

g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$g'(x) = \ln\left(x^2-1\right) + x.\frac{2x}{x^2-1} + \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} - 2$$

$$= \ln\left(x^2-1\right) + \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-1} - 2$$

$$= \ln\left(x^2-1\right) + \frac{2x^2-2-2x^2+2}{x^2-1}$$

$$= \ln\left(x^2-1\right) = f(x) \text{ pour } x>1.$$

$g'(x) = f(x) \Rightarrow g$ est une primitive de f sur $]1,+\infty[$

Exercice 11

$$f(x) = \ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$$

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\} =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{6+6}{(x+2)^2}}{\dfrac{3x-6}{x+2}}=\frac{12}{(3x-6)(x+2)}$$

$$=\frac{12}{3(x-2)(x+2)}=\frac{4}{x^2-4}.$$

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↗ Ln3	$+\infty$	↘ $-\infty$	$-\infty$	↗ ln3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$$

$$=\ln 3$$

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty,\ X=\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$$

$$=\lim_{x\to2}\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|=\lim_{X\to0^+}\ln X=-\infty,\ X=\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|.$$

2) $x\in Df, 2\times0-x=-x\in Df$

Et on a :

$$f(-x)=\ln\left|\frac{-3x-6}{-x+2}\right|=\ln\left|\frac{-(3x+6)}{-(x-2)}\right|=\ln\left|\frac{3x+6}{x-2}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{1}{\dfrac{3x+6}{x-2}}\right|=-\ln\left|\frac{x-2}{3x+6}\right|=-\ln\left|\frac{x-2}{3(x+2)}\right|$$

$$=-\ln\left|\frac{3x-6}{9(x+2)}\right|=-\left[\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|-\ln 9\right]$$

$$=\ln 9-\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|=2\ln 3-f(x)$$

Donc : $f(2\times0-x)=2\times\ln 3-f(x)$

D'où $\Omega(0,\ln 3)$ est un centre de symétrie pour la courbe C de f.

3) Intersection avec l'axe des abscisses :

$$f(x)=0\Leftrightarrow\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|=0$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-6}{x+2}=1\ \text{ou}\ \frac{3x-6}{x+2}=-1$$

$$\Leftrightarrow x=4\quad\text{ou}\quad x=1$$

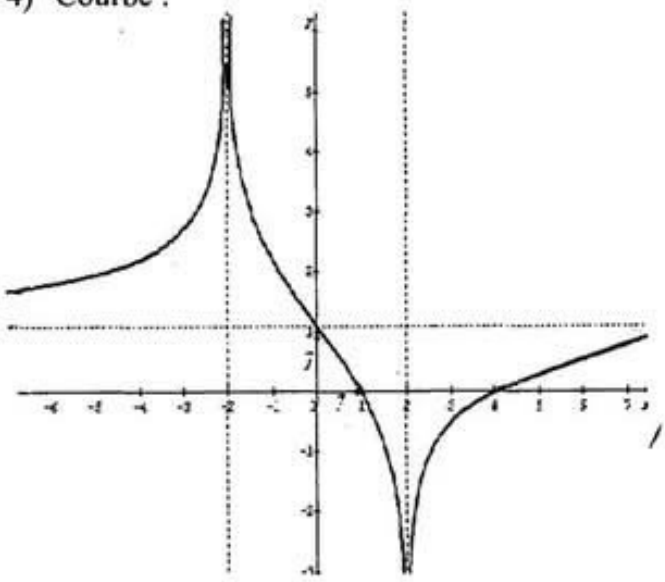
Donc $C\cap(o,\vec{i})=\{I(4,0),J(1,0)\}$.

Intersection avec l'axe des ordonnés :

$$f(0)=\ln\left(\left|\frac{-6}{2}\right|\right)=\ln(3).$$

$$\Rightarrow C\cap(o,\vec{j})=\{\Omega(0,\ln 3)\}.$$

4) Courbe :



5) a) g est continue et strictement décroissante sur $]-2,2[$ donc g réalise une bijection de $]-2,2[$ sur $g(]-2,2[)=\square$

b) g est dérivable en 0 : $(g(0)=\ln 3)$

et $g'(0)=\dfrac{4}{0-2}=-2\neq0$

$\Rightarrow g^{-1}$ est dérivable en $\ln 3$

et $\left(g^{-1}\right)'(\ln 3)=\dfrac{1}{g'(0)}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 12

1)a) $g(x)=x\ln^2 x-1,\ x\in\ ]0,+\infty[$.

$g'(x)=\ln^2 x+x.2.\dfrac{1}{x}.\ln x$

$=\ln^2 x+2\ln x.$

$=\ln x(\ln x+2).$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0$ ou $\ln x=-2$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	-1 ↗	$\frac{4}{e^2}-1$	↘	-1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln^2 x-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \underbrace{x\ln^2 x}_{0}-1=-1$

$g\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{1}{e^2}\ln^2\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-1=\dfrac{4}{e^2}-1$

b) g est continue et strictement croissante sur $]2,3[$.

$g(2)=2\ln^2 2-1\ \square\ -0,04<0$

$g(3)=3\ln^2 3-1\ \square\ 2,62>0$

$g(2)\times g(3)<0.$

$\Rightarrow$ L'équation $g(x)=0$ admet une unique Solution $\alpha\in\ ]2,3[$.

c) Signe de g

x	0		α		$+\infty$
g(x)	‖	$-$	0	$+$	

2)a) $Df=[0,+\infty[\setminus\{1\}$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+} x+\dfrac{1}{\ln x}$

$=0=f(0).$

$\Rightarrow$ f est continue à droite en 0.

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x\ln x+1}{\ln x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x+1}{x\ln x}=-\infty.$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0.

d) f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et

$f'(x)=\left(x+\dfrac{1}{\ln x}\right)'$

$=1-\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=1-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

$=\dfrac{x\ln x^2-1}{x\ln^2 x}=\dfrac{g(x)}{x\ln^2 x}$

Le signe de f'(x) est celui de g (x).

Tableau de variation :

x	0		1		α		$+\infty$
f'(x)	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$
	‖	$-\infty$	‖				

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{\ln x}$

$=+\infty+\dfrac{1}{+\infty}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} x+\dfrac{1}{\ln x}=1+\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} x+\dfrac{1}{\ln x}=1+\dfrac{1}{0^-}-\infty$

e) $f(\alpha)=\dfrac{\alpha\ln\alpha+1}{\ln\alpha}$

Or $g(\alpha)=\alpha\ln^2\alpha-1=0$

$\Rightarrow \alpha\ln^2\alpha=1$

$$\Rightarrow \ln^2\alpha = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \ln\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \frac{\alpha.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{\sqrt{\alpha}+1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}+1\right)$$

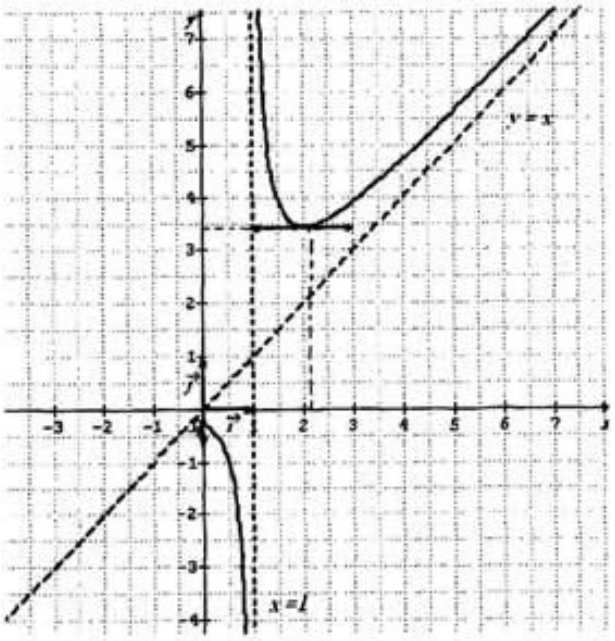
$$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha}\,.$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x + 1}{\ln x} - x$

$$= \lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{\ln x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$\Rightarrow D: y = x$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$.

g) Courbe C



C Admet une demi-tangente verticale
Au point d'abscisse 0 dirigé vers le bas.

$f(\alpha) \approx 2{,}1 + \sqrt{2{,}1} \approx 3{,}5$

Exercice 13

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

1) $Df = \left\{x \in \mathbb{R}^*_+, 1 - \ln x \geq 0\right\}$.

On a : $1 - \ln x \geq 0$ et $x > 0$.

$\Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$.

Donc $Df =]0, e]$.

2) f est dérivable si $1 - \ln x > 0$

Donc dérivable sur $]0, e[$.

$$f'(x) = \frac{(1-\ln x)'}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}.$$

$$f''(x) = \frac{\left(2x\sqrt{1-\ln x}\right)'}{4x^2(1-\ln x)} = \frac{\left(x\sqrt{1-\ln x}\right)'}{2x^2(1-\ln x)}.$$

$$= \frac{\sqrt{1-\ln x} + x\times\left(\frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}\right)}{2x^2(1-\ln x)}.$$

$$= \frac{2(1-\ln x)-1}{4x^2(1-\ln x)\sqrt{1-\ln x}}.$$

$$= \frac{-2\ln x - 1}{4x^2\left(\sqrt{1-\ln x}\right)^2}$$

3) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{1-\ln x}}$, $x \in]0, e[$.

T.V

X	0		e
f'(x)	‖	−	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	0

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1-\ln x} = +\infty$$

4) f est continue et strictement décroissante sur $]0, e]$ donc f réalise une bijection de $]0, e]$ sur $f(]0, e]) = [0, +\infty[$.

5)*/ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	e
f"(x)	−	0	+

$f''(x)$ S'annule en $\frac{1}{\sqrt{e}}$ et change de signe

Donc le point $I\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ est un point d'inflexion pour C.

*/ soit T la tangente à C en I.

$$T: y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

$$\text{Or } f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{6}}$$

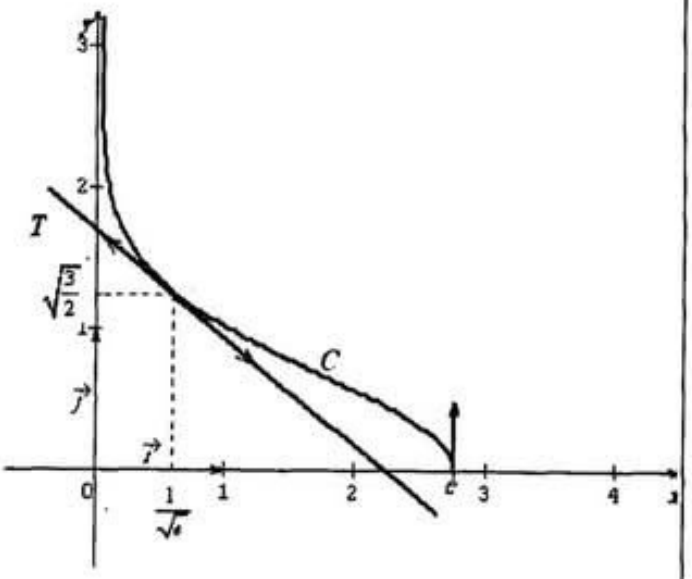
$$\Rightarrow T: y = -\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{6}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{e}{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{e}{6}}x+\frac{4}{\sqrt{6}}.$$

$$\Rightarrow T: y = -\sqrt{\frac{e}{6}}x+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

6) Courbe C



Exercice 14

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$$

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$$

1) $x \in]0,+\infty[$.

$$g'(x) = 2\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-\frac{3}{x} = 3\sqrt{x}-\frac{3}{x}$$

$$= \frac{3\left(x\sqrt{x}-1\right)}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Donc g est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Donc : $x \le 1 \Leftrightarrow g(x) \ge g(1) = 8 \Leftrightarrow g(x) \succ 0$

$x \ge 1 \Leftrightarrow g(x) \ge g(1) = 8 \Leftrightarrow g(x) \succ 0$

Conclusion : $\forall x \in]0,+\infty[$, on a $g(x) \succ 0$

2)*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

$$= \lim_{x\to 0^+} 3.\underbrace{\ln x}_{-\infty}.\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 1 = -\infty$$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3.\frac{\overbrace{\ln x}^{0}}{x^{\frac{1}{2}}} + x - 1 = +\infty.$$

3) $x \in]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{3\left(\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} + 1$$

$$= \frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)}{x} + 1$$

$$= 3\left(\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\right) + 1$$

$$= \frac{6 - 3\ln x}{2x\sqrt{x}} + 1$$

$$f'(x) = \frac{6 - 3\ln x + 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}} > 0.$$

$\Rightarrow$ f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1 - (x-1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

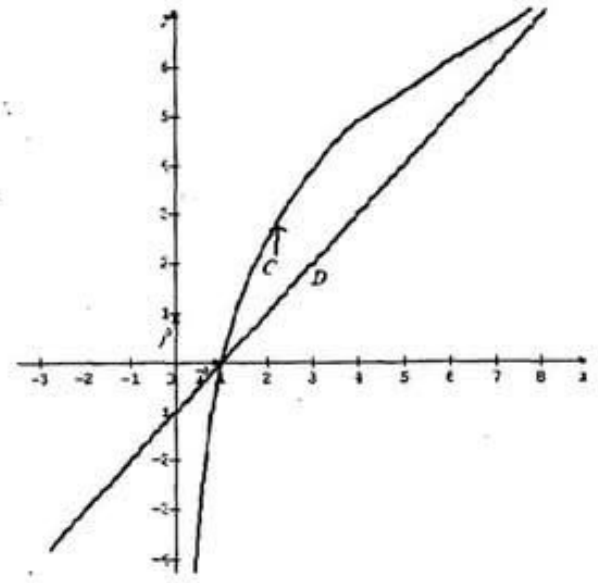
D'où la droite D d'équation : $y = x - 1$ est une asymptote oblique pour C au voisinage de $+\infty$

5) $f(x) - (x-1) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - (x-1)$	−	0	+
Position	D/C		C/D

(1,0)

6)



Exercice 15

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)*/ Continuité à droite en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0.

$$*/ \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x\ln x}{x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\not{x}\ln x}{\not{x}(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0

2) $g(x) = x + 1 + \ln x, x > 0$

a) $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, x > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $g(]0, +\infty[) = \square$

Comme $0 \in \square$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in \square$

$$\begin{cases} g(0,27) \square -0,039 < 0 \\ g(0,28) \square 0,007 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0,27 < \beta < 0,28$$

$\Rightarrow 0,27 < \beta < 0,28.$

3) a) $x>0$

$$f'(x)=\frac{(x\ln x)'(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x\ln x+\ln x+x+1-x\ln x}{(x+1)^2}$$

Donc $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$, pour tout $x>0$

b) le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

T.V

x	0		β		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	‖		
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\beta$	↗	‖ 0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}.\ln x=1\times(+\infty)=+\infty$$

On a : $g(\beta)=\ln\beta+\beta+1=0$

$\Rightarrow \ln\beta=-\beta-1$

D'où $f(\beta)=\frac{\beta\ln\beta}{\beta+1}=\frac{\beta(-\beta-1)}{\beta+1}=-\beta$

c) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{x+1}-\ln x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x-x\ln x-\ln x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{x+1}$$

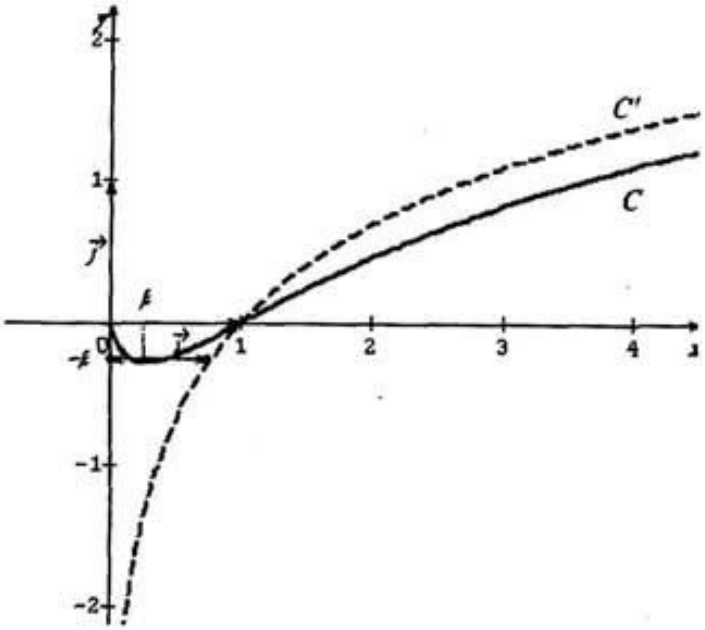
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\ln x}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=0$$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe C_f se comporte comme celle de la fonction ($\ln x$)c'est-à-dire C admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{i})$

Position de C et C' :

X	0		1		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	‖	−	0	+	
Position de C et C'	‖	C/C'		C'/C	

(1,0)



Exercice 16

Soit n le nombre de divisions

Pour chaque étape une cellule Se divise en deux :

1er étape : on compte 2 cellules $=2^1$ cellules.

2eme étape : on compte 4 cellules $=2^2$ cellules.

3eme étape : on compte 8 cellules $=2^3$ cellules.

Après n étapes une cellule se divise en 2^n cellules. Si on compte 10^6 cellules.

Alors on aura $2^n=10^6$

$2^n=10^6\Leftrightarrow\ln 2^n=\ln 10^6$

$\Leftrightarrow n\ln 2 = 6\ln 10$

$\Leftrightarrow n = 6\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \approx 6\times 3{,}32$

$\Leftrightarrow n \approx 19{,}92$ donc $n = 20 (n \in IN)$

Exercice 17

(log désigne logarithme décimale)

$$pH = -\log\left(H_3O^+\right) = -\frac{\ln\left[H_3O^+\right]}{\ln 10}$$

1) $pH = -\dfrac{\ln\left[H_3O^+\right]}{\ln 10} = -0{,}43\times \ln\left(2{,}3.10^{-3}\right)$

$= -\dfrac{\ln\left(2{,}3.10^{-3}\right)}{\ln 10} = -(-2{,}63)$

$\approx 2{,}63 \Rightarrow LogX = 0{,}43\ln x$

2) $pH = 9{,}4 = -\log\left[H_3O^+\right] = \log\dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]}$

$\Leftrightarrow 10^{9{,}4} = \dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]}$

$\Leftrightarrow \left[H_3O^+\right] = \dfrac{1}{10^{9{,}4}} = 10^{-9{,}4}$

$\Rightarrow \left[H_3O^+\right] = 3{,}981071706.10^{-10}$

Exercice 18

$x \in [0{,}1;6]$

$y = f(x) = 70{,}228 + 5{,}104x + 9{,}222\ln x$

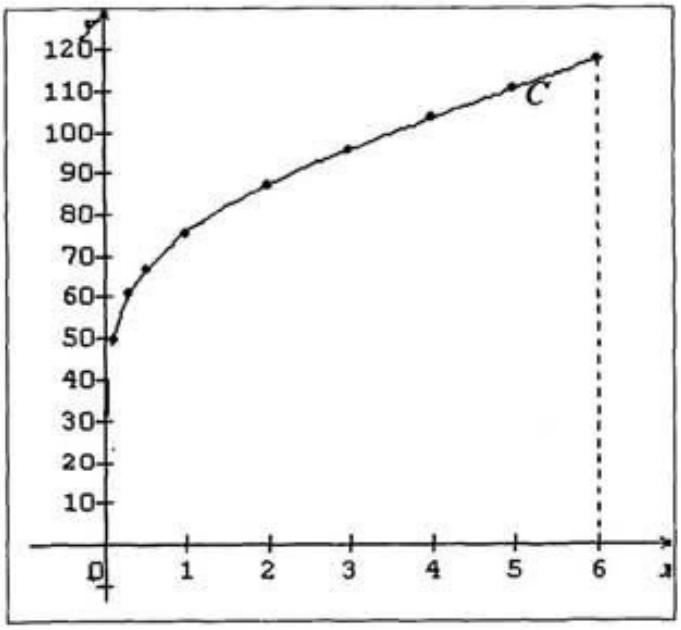
X	0.1	0.3	0.5	1
Y	50	61	66	75

X	2	3	4	5	6
Y	87	96	103	111	117

2) $f'(x) = 5{,}104 + 9{,}222\times\dfrac{1}{x}$, $x \in [0{,}1;6]$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

x	0,1		6
$f'(x)$		+	
$f(x)$	50	↗	117



3)a) un enfant âgé de deux ans et demi (2ans et 6mois)

$f(2{,}5) = 70{,}228 + 5{,}104\times 2{,}5 + 9{,}222\times\ln(2{,}6)$ En cm.

Donc $y = 91$ cm à un cm près

b) un enfant mesure 1m c'est-à-dire $y = 100$ cm

Donc $f(x) = 100$ en cm

$\Rightarrow 70{,}228 + 5{,}104x + 9{,}222\ln x = 100$

$\Rightarrow 9{,}222\ln x = 5{,}104x + 70{,}228 - 100$

$\Rightarrow 9{,}222\ln x = 5{,}104x - 29{,}772$

$\Rightarrow \ln x = \dfrac{5{,}104x - 29{,}772}{9{,}222}$??

Pour $y = 100$ graphiquement on trouve $x = 3{,}55$.

Donc l'âge estimé est 3 ans et demi à un jour près

Exercice 19

La masse du métal radioactif est périodique

de période (138).pour chaque période la masse diminue de moitié.

Désignons par n le nombre de période. On a : par exemple pendant une période : la masse

Devienne: $\frac{1}{2}\times 10 = 5\,g.$

Pendant deux périodes : la masse

Devienne: $\frac{1}{4}\times 10 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 .10$

Pendant n période : la masse est : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 10$

La masse sera 0;1 donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 10 = 0,1$

et par suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{0,1}{10} = 0,001.$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,001.$

Cherchons n :

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,001$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln(0,001)$

$\Leftrightarrow n\ln\frac{1}{2} = \ln(0,001)$

$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,001)}{\ln\frac{1}{2}}$

Or $\frac{\ln(0,001)}{\ln\frac{1}{2}} \approx 6,64$ donc $n = 7.$

Le nombre de jours estimé est :
$7\text{x}138 = 966\,j$ à un jour prés

Exercice 20

1) $h(t) = -5t^2 + 20t, t \geq 0$

a) la balle retombe si $h(t) = 0$ donc

$-5t^2 + 20t = 0 \Rightarrow t(-5t + 20) = 0$

$\Rightarrow t = 0$ ou $5t = 20.$

D'où la balle retombe au sol si $t = \frac{20}{5} = 4\,s$

La balle retombe au sol après 4 secondes.

b) Déterminer les extremums de h s'ils existent :

$h'(t) = -10t + 20 = 0 \Rightarrow -10t + 20 = 0 \Rightarrow t = 2.$

X	0	2	$+\infty$
h '(x)	−	0	+
h(x)	0 ↗	20	↘ $-\infty$

h admet un maximum absolue en $t = 2$ atteint 20 .Donc à l'instant $t = 2$ seconde la balle atteint sa hauteur maximale qui est 20 m.

2) a) $h(0) = 0$: à l'instant $t = 0$ la balle est au sol.

$$h'(t) = -10t + 11 - \frac{2}{1+t}$$

$$h'(t) = \frac{-10t(1+t) + 11(1+t) - 2}{(1+t)}$$

$$= \frac{-10t - 10t^2 + 11 + 11t - 2}{(1+t)}$$

$$= \frac{-10t^2 + t + 9}{1+t}$$

$h'(t) = 0 \Rightarrow -10t^2 + t + 9 = 0$

Comme $a + b + c = -10 + 1 + 9 = 0$

Donc $t' = 1$ ou $t'' = \frac{-9}{10} \leq 0$.

D'où $h'(t) = (t-1)(t + \frac{9}{10})$

X	0	1	$+\infty$
h '(x)	−	0	+
h(x)	0 ↗	6- 2ln2	↘ $-\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}(-5t^2 + 11t - 2\ln(1+t)) = -\infty$

c) h admet $6 - 2\ln 2$ comme maximum

absolue sur $]0,+\infty[$ pour $t=1$ donc à l'instant $t=1$ seconde la balle atteint la hauteur L.

$L=(6-2\ln 2)$ m. .Or $6-2\ln 2 \approx 4.61$.

La hauteur est de 4 m et 60 cm.

d) la balle retombe au sol si : $h(t)=0$

Donc si : $-5t^2+11t-2\ln(1+t)=0,\quad t\geq 1$

En utilisant une calculatrice :
On a :

$h(2) \approx -0,197$
$h(1,98) \approx -0,005$
$h(1,97) \approx 0,088$

$h(1,97)\times h(1.98)\leq 0$ donc $h(t)=0$ pour un réel $t\in]1.97;1.98[$ (théorème des valeurs intermédiaires
La balle retombe a) u sol après 1seconde et 97 au deuxième. C'est-à-dire à peut après 2 Secondes.

Exercice 21

$x\in\mathbb{R}$ $U(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, $V(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

On sait que : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

1) a) $U(x).V(x)=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$=\sqrt{x^2+1}^2-x^2$
$=x^2+1-x^2=1$

On a : $U(x).V(x)=1\geq 0$
Donc U et V ont même signe.

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $1+x^2\geq x^2$
Donc $\sqrt{1+x^2}\geq\sqrt{x^2}=|x|$
-- Or si $x\geq 0$ on a : $|x|=x$
Et par suite $\sqrt{1+x^2}\geq x$
Ce qui donne $\sqrt{1+x^2}-x\geq 0$
D'où $V(x)\geq 0$ et comme U et V ont même signe on aura $U(x)\geq 0$

-- Si $x\leq 0$: $\sqrt{1+x^2}\geq -x$
Donc $\sqrt{1+x^2}+x\geq 0$

D'où $U(x)\geq 0$ et par suite $V(x)\geq 0$
Car U et V ont même signe.

Conclusion
$\forall x\in\mathbb{R}$: $U(x)\geq 0$ et $V(x)\geq 0$.

2) a)
$U'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+1$
$=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

$(\sqrt{f})'=\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$: $U'(x)=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{U(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow\dfrac{U'(x)}{U(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Et par suite : $f(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$.

D'où $F(x)=\ln(|U(x)|)+k$, $x\in\mathbb{R}$
$=\ln(U(x))+k$ (Car: U(x) > 0)

Or $F(0)=0\Rightarrow\ln(U(0))+k=0$
$\Rightarrow\ln(1)+k=0\Rightarrow k=0$

Donc : $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

3) a) $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$

$F(x)+F(-x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$
$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$
$=\ln\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\times\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right]$

$= \ln\left[U(x).V(x)\right]$ $\quad U(x).V(x)=1$

D'après 1)a)

$= \ln\left[-x^2+x^2+1\right] = \ln 1 = 0$

$\Rightarrow F(-x) = -F(x)$ $\quad \Rightarrow F$ est impaire.

b) $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$

$\Rightarrow F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

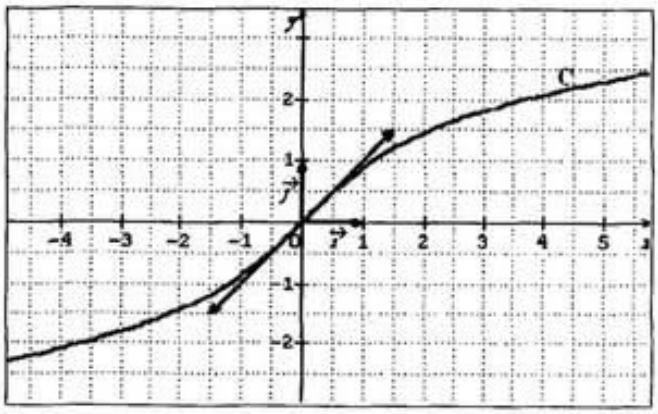
$= 0+0 = 0$

$\Rightarrow C$ admet une branche parabolique

Infinie de direction $(o,\vec{i})$

F est impaire $\Rightarrow C$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Courbe :



d) $T : y = F'(0)(x-0) + f(0)$

$\boxed{T = y = x}$

Exercice 22

I/ $g(x) = x + (x-2)\ln x$

1) a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$g'(x) = 1 + (x-2)'\ln x + \ln x'(x-2)$

$= 1 + \ln x + (x-2)\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+x-2}{x} + \ln x$

$= \dfrac{2x-2}{x} + \ln x = 2\dfrac{(x-1)}{x} + \ln x.$

Donc : $g'(x) = 2\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \ln x \ ; \ \forall x > 0$

b) */ si $x > 1$ on a $\ln > 0$ et $\dfrac{x-1}{x} > 0$

D'où $2\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \ln x > 0.$

Donc $g'(x) > 0$ si $x > 1$

*/ si $0 < x < 1$ on a $\ln < 0$ et $\dfrac{x-1}{x} < 0$

Donc : $2\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \ln x < 0.$

Par suite : $g'(x) < 0$ si $x \in]0,1[$.

2) a)

X	0		1		$+\infty$
g '(x)	‖	−	0	+	
g(x)	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x + \underbrace{(x-2)}_{-2}\underbrace{\ln x}_{-\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + (x-2)\ln x = +\infty$

b) g admet un minimum absolu en 1 atteint 1.

Donc $\forall x > 0 : g(x) \geq 1$.

II/ $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

1) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Et on a : $f'(x) = \ln x + x.\dfrac{1}{x} - 2.\dfrac{1}{x}\ln x$

$= \ln x + 1 - 2\dfrac{\ln x}{x}$

$$= \frac{x\ln x + x - 2\ln x}{x}$$

$$= \frac{x+(x-2)\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

$\forall x > 0 : f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

Comme : $\forall x > 0, g'(x) \geq 1$ alors $f'(x) \geq 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[1 + x\ln x - 2(\ln x)^2\right]$$

$$= 1 + 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln x - 2(\ln x)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

b) f étant continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ d'où f réalise une bijection réciproque f^{-1} définie sur $J = f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} f, \lim_{x\to+\infty} f\right[$.

$\Rightarrow J = \mathbb{R}$.

2) a) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$= \frac{g(1)}{1}(x-1) + 1 = 1\times(x-1) + 1 = x$$

$$\boxed{T : y = x}$$

b) $x > 0, h(x) = x - 1 - \ln x$.

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}. \; x > 0$$

$h'(x)$ à le signe de $(x-1)$

Tableau de signe de $h'(x) = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1	$+\infty$
$x-1$	|| −		0	+
Signe de $h'(x)$	|| −		0	+

Tableau des variations de h :

x	0		1	$+\infty$
$h'(x)$	|| −		0	+
$h(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}(x - 1 - \ln x) = +\infty$$

Car $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 - \ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

• h admet 0 comme minimum Absolue en 1 donc $\forall x > 0; h(x) \geq 0$

c) $f(x) - x = 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x$

$$= 1 - \ln^2 x + x\ln x - x$$

$$= (1 - \ln x)(1 + \ln x) + x(\ln x - 1)$$

$$= (\ln x - 1)[x - 1 - \ln x]$$

$$= (\ln x - 1).h(x)$$

$\Rightarrow f(x) - x = (\ln x - 1).h(x)$

Ou bien : on développe l'expression $(\ln x - 1).h(x)$ on trouve $f(x) - x$.

• Le signe de $f(x) - x$ est celui de $(\ln x - 1).h(x)$ et comme $h(x) \geq 0$

Alors le signe de $f(x) - x$ est celui de $(\ln x - 1)$

X	0	e	$+\infty$
$f(x)-x$	−	0	+
Position	T/ζ		ζ/T
		(e,e)	

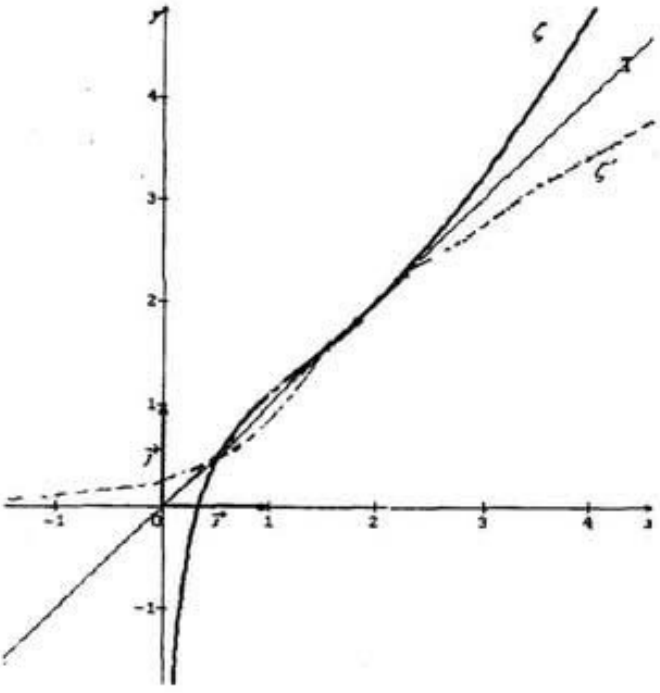
3) $\zeta' = S_T(\zeta)$: S_T symétrie orthogonale d'axe la droite $T : y = x$.

Branche infinie :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \ln x - \frac{\ln^2 x}{x} = +\infty$$

ζ Admet une Branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{j})$

Courbes de ζ et ζ' :



Exercice 23

$f(x) = 1 + \ln\left[x(2-x)\right]$

1) a) $Df = \{x \in \mathbb{R},\ x(2-x) > 0\}$.

Signe de : $x(2-x)$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2-x$	+		+	0	−
x	−	0	+		+
$x(2-x)$	−	0	+	0	−
			////////		

Ce qui donne : $Df =]0,2[$

b) $f'(x) = 0 + \dfrac{\left[x(2-x)\right]'}{x(2-x)} = \dfrac{(2x-x^2)'}{x(2-x)}$

$$= \frac{2-2x}{x(2-x)} = \frac{2(1-x)}{x(2-x)}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$

x	0		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	1	↘	
	$-\infty$				$-\infty$

$$\lim_{x\to0^+} 1+\ln\left[x(2-x)\right] \overset{X=x(2-x)}{=} 1+\lim_{X\to0^+}\ln X = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} 1+\ln\left(x(2-x)\right) \underset{X=x(2-x)}{=} \lim_{X\to0^+} 1+\ln X = -\infty$$

2) a) $x \in]0,2[$

$0 < x < 2 \Leftrightarrow -2 < -x < 0 \Leftrightarrow 0 < 2-x < 2$

Donc $(2\times1-x) \in]0,2[$.

On a : $x \in Df$, $2\times1-x \in Df$ et on a :

$$\begin{aligned} f(2-x) &= 1+\ln\left[(2-x)(2-(2-x))\right] \\ &= 1+\ln\left[(2-x)(2-2+x)\right] \\ &= 1+\ln\left[(2-x).x\right] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie pour la courbe C de f.

b) Les abscisses des points d'intersection de C et l'axe $(o,\vec{i})$ sont les solutions de L'équation $f(x)=0$

Or $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln\left[x(2-x)\right]=0$

$\Leftrightarrow \ln\left[x(2-x)\right] = -1$

$\Leftrightarrow x(2-x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - \frac{1}{e} = 0$

$\Delta' = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$. D'où

$$x_0 = \frac{-1+\sqrt{1-\frac{1}{e}}}{-1} = 1-\sqrt{1-\frac{1}{e}}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-\frac{1}{e}}}{-1} = 1+\sqrt{1-\frac{1}{e}}$$

Donc : $x_0 = 1-\sqrt{1-\frac{1}{e}}$ et $x_1 = 1+\sqrt{1-\frac{1}{e}}$

3) $x \in]0,2[; \varphi(x) = f(x) - x$

a) $\varphi'(x) = f'(x) - 1$

$$\varphi'(x) = \frac{2-2x}{x(2-x)} - 1 = \frac{2-2x-2x+x^2}{x(2-x)}$$

$$= \frac{2x^2-4x+2}{x(2-x)}$$

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{2}$ ou $x-2=-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$ ou $x=2-\sqrt{2}$

Etude de signe : $x^2-4x+2=0$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-4x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

T.variation :

x	0		$2-\sqrt{2}$		2
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗	$0{,}81$	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) - x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) - x = -\infty$

$\varphi\left(2-\sqrt{2}\right) = f\left(2-\sqrt{2}\right) - 2 + \sqrt{2}$

$= 1+\ln\left[\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\right] - 2 + \sqrt{2}$

$= 1+\ln\left[\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)\right] \square 0{,}81$

b)*/ φ est continue et strictement décroissante sur $]2-\sqrt{2},2[$ et on a :

$\varphi\left(]2-\sqrt{2},2[\right) = \left]\lim\limits_{2^-}\varphi, \varphi\left(2-\sqrt{2}\right)\right[=]-\infty\ ;\ 0{,}81[$

Comme $0 \in]-\infty;0,81[$ alors l'équation $\varphi(x)=0$ possède une unique solution dans $]2-\sqrt{2},2[$.

On a : $\varphi(1) = f(1) - 1 = 1-1 = 0$.

Donc 1 est l'unique solution dans $]2-\sqrt{2},2[$ **(1)**

*/ φ est continue est strictement croissante sur $]0, 2-\sqrt{2}[$

$\varphi\left(]0,2-\sqrt{2}[\right) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x), \varphi\left(2-\sqrt{2}\right)\right[$

$=]-\infty;0,81[$

$0 \in]-\infty;0,81[$. $\varphi(x)=0$ Admet une unique solution $\alpha \in]0,2-\sqrt{2}[$.**(2)**

Conclusion

D'après (1) et **(2)** : l'équation $\varphi(x)=0$ possède deux solutions 1 et $\alpha \in]2-\sqrt{2},2[$

*/ $\varphi(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 - x_0 = -x_0$

$$= -1+\sqrt{1-\frac{1}{e}} < 0$$

$$\varphi(0,3) = f(0,3) - 0,3$$
$$= 1 + \ln(0,3 \times 1,7) - 0,3$$
$$= 0,7 + \ln(0,51) \approx 0,02 > 0$$

$$\varphi(0,3) \times \varphi(x_0) < 0 \Rightarrow \alpha \in]x_0; 0,3[$$

Remarque :

$$x_0 = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{e}} \approx 0.23 \Rightarrow x_0 < 0,3.$$

*/ $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha$$
$$\Rightarrow 1 + \ln[\alpha(2-\alpha)] = \alpha$$
$$\Rightarrow \boxed{\ln[\alpha(2-\alpha)] = \alpha - 1}$$

c) étude de signe de $\varphi(x)$

x	0		α		1		2
$\varphi(\alpha)$		−	0	+	0	−	

Sur $]0, \alpha[\cup]1, 2[$. $\varphi(x) < 0$

$\Rightarrow f(x) < x \Rightarrow C$ est au dessous de $\Delta : y = x$

Sur $]\alpha, 1[: \varphi(x) > 0$

$f(x) > x \Rightarrow C$ est au dessus de $\Delta : y = x$.

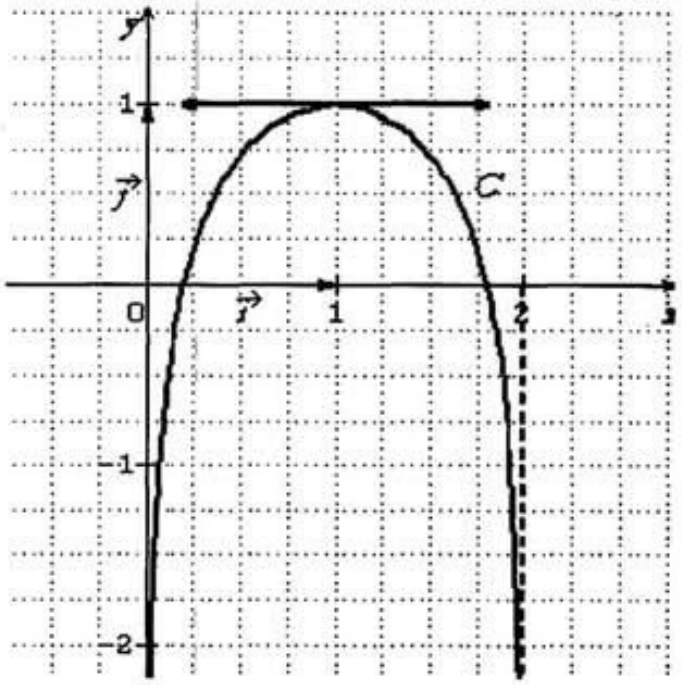
$C \cap \Delta = \{(1,1);(\alpha,\alpha)\}$.

Pour le graphe : $\frac{1}{e} \approx 0,36$

$$1 - \frac{1}{e} \approx 0,64 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{e}} \approx 0,8$$

$x_0 \approx 0,2$, $x_1 \approx 1,8$

4) Courbe :



5/ g restriction de f a $]0,1]$

a) g est continue et strictement croissante sur $]0,1]$ donc g réalise une bijection de I sur $g(I) = \left]\lim_{0^+} g, g(1)\right]$

$$=]-\infty, 1] = J$$

b) $y \in]0,1], x \in]-\infty,1]$

$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x$

$$g(y) = 1 + \ln[y(2-y)] = x$$
$$\Leftrightarrow \ln[y(2-y)] = x - 1$$
$$\Leftrightarrow y(2-y) = e^{x-1}$$
$$\Leftrightarrow -y^2 + 2y - e^{x-1} = 0 \quad \text{(équation d'inconnue y).}$$
$$\Delta' = 1 - e^{x-1}$$

On a : $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$

$\Leftrightarrow e^{x-1} < 1 \Leftrightarrow 1 - e^{x-1} > 0$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - e^{x-1}}}{-1} = 1 - \sqrt{1 - e^{x-1}}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - e^{x-1}}}{-1} = 1 + \sqrt{1 - e^{x-1}}$$

On a:

$y \in]0,1]$ Donc $y \leq 1$ d'où

$$\boxed{f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - e^{x-1}}}$$

Exercice 24

1) $x \in]0,+\infty[. g(x) = -1 + x + 2\ln x$

a) $g'(x) = 1 + \dfrac{2}{x} > 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$			
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (-1 + x + 2\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + x + 2\ln x) = +\infty$

b) $g(1) = -1 + 1 + 2 \times 0 = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

c) •Si $x > 1$ on a : $\dfrac{1}{x} < 1$ Donc $g\left(\dfrac{1}{x}\right) < 0$

•Si $0 < x < 1$ on a : $\dfrac{1}{x} > 1$ Donc $g\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$

2) $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - x^2 \ln x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \underbrace{x \ln x}_{0}) = 1$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 1$

b) pour $x > 0$ on a :

$f'(x) = (x - x^2 \ln x)'$

$= 1 - (x^2 \ln x)'$

$= 1 - \left(2x \ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x}\right)$

$= 1 - 2x \ln x + x = x\left(\dfrac{1}{x} - 2\ln x + 1\right)$

$= x\left(\dfrac{1}{x} + 2\ln\dfrac{1}{x} + 1\right) = x \times g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $f'(x) = x \cdot g\left(\dfrac{1}{x}\right)$: le signe de

f'est celui de $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - x^2 \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty$

d) * f est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

$f(]0,1]) =]0,1]$ or $0 \notin]0,1]$.

Donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0,1]$

* f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.et $f([1,+\infty[) =]-\infty,1]$.

$0 \in]-\infty,1]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1,+\infty[$.

Conclusion :

Dans $]0,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ admet Une unique solution α.

$f\left(\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{7}{4} - \dfrac{49}{16}\ln\dfrac{7}{4} \approx 0,036 > 0$

$f(2) = 2 - 4\ln 2 \approx -0,77 < 0$

$f\left(\dfrac{7}{4}\right) \times f(2) < 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{7}{4} < \alpha < 2}$.

) a) $\Delta:\begin{cases} y = f_d'(0)(x-0)+f(0) \\ x \geq 0 \end{cases}$

$\Delta:\begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$

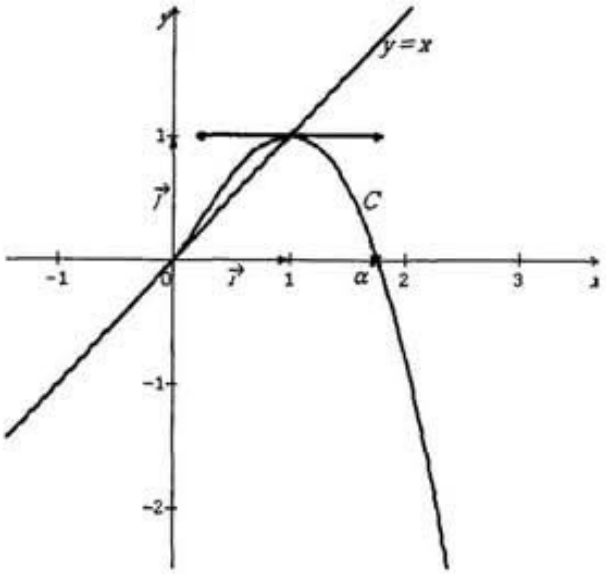
b) $f(x)-x = -x^2 \ln x$

Comme $x^2 \geq 0$ le signe de $f(x)-x$ est celui de $(-\ln x)$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	+	0	−
Position	C/Δ	(1,1)	Δ/C

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x\ln x = -\infty$

Donc C admet une branche infinie Parabolique de direction $(o,\vec{j})$.



Exercice 25

I/ 1)a) • $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$

(Car $x=-1$ est une asymptote).

• $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$

(Car $x=1$ est une asymptote).

b)

x	−2	−1	1	2
$f'(x)$	−	‖ +	‖ −	
$f(x)$	↘ $-\infty$	‖ ↗ $-\infty$	‖ ↗ $+\infty$	↘

c) le nombre des solutions de l'équation $f(x)=0$ est 5.

2) a) g étant continue et strictement croissante sur $[0,1[$ .donc g réalise une bijection réciproque de $[0,1[$ sur

$g([0,1[) = \left]\lim\limits_{1^-} g, g(0)\right] =]-\infty,0] = J$

b) $C' = S_D(C)$: D: $y=x$. (voir courbe).

II/ $f(x) = ax+b+\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.

1) on a : $\boxed{(ax+b)' = a}$ $\boxed{\left(\left(\ln|U|\right)' = \dfrac{U'}{U}\right)}$

$$\left(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= -\frac{2}{x^2-1}.$$

Donc $f'(x) = a - \dfrac{2}{x^2-1}$.

b) on a : $f(0) = a\times0+b+\ln|1| = b$ Donc $b=0$

$f'(0) = 0 = a - \dfrac{2}{0-1} = a+2$ Donc $a=-2$.

2) $f(x) = -2x+\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.

a) $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$; $-x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

$f(-x) = -2(-x)+\ln\left|\dfrac{-x+1}{-x-1}\right| = 2x+\ln\left|\dfrac{-x+1}{x+1}\right|$.

$f(-x)+f(x)=-2x+\ln\left|\frac{-x+1}{x+1}\right|$

$+2x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

$=\ln\left[\left|\frac{x+1}{x-1}\times\frac{-x+1}{x+1}\right|\right]=\ln|1|=\ln 1=0$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$ Donc est impaire

b) $f'(x)=-2-\frac{2}{x^2-1}=-\frac{2x^2}{x^2-1}$

Rmq f est impaire on l'étudie sur $[0,+\infty[$:

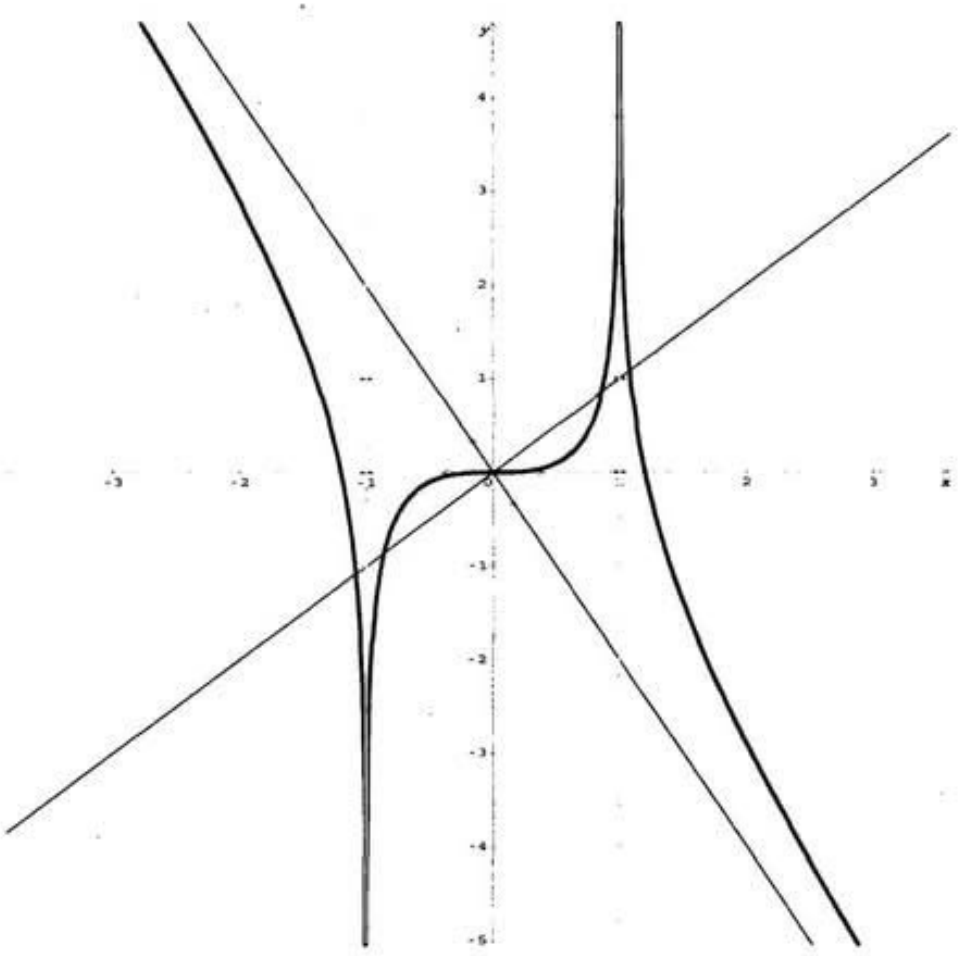
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	−
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -2x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=-\infty$.

3)

$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)=1$ d'où

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-2x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\ln 1=0.$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-2x)=0$ donc la droite $\Delta: y=-2x$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$. Et comme f est impaire alors $y=-2x$ est aussi une asymptote à C au voisinage de $-\infty$ car $S_o(\Delta)=\Delta$.

Annexe